Естественные науки

УДК 514.76

ОБ ОДНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ *p*-СЕМЕЙСТВА *m*-ПЛОСКОСТЕЙ В *n*-МЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.Т. Ивлев, В.К. Барышева, Е.А. Молдованова

Томский политехнический университет
E-mail: eam7@front.ru

Изучаются частные классы семейств линейных подпространств в многомерном евклидовом пространстве, связанные со специальным видом отображений некоторых полей инвариантных двумерных площадок.

1. Аналитический аппарат

Все функции, встречающиеся в данной статье, предполагаются аналитическими, а рассмотрения носят локальный характер.

Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1–5].

Рассматривается n-мерное евклидово пространство E_n, отнесённое к подвижному ортонормальному реперу $R=\{\bar{A},\bar{e}_i\}$, $(i,j,k=\overline{1,n})$ с деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$d\bar{A}=\omega^i\bar{e}_i,\; d\bar{e}_i=\omega_i^j\bar{e}_j,$$

$$D\omega^i=\omega^k\wedge\omega_k^i,\; D\omega_i^k=\omega_i^j\wedge\omega_j^k. \tag{1.1}$$

Здесь 1-формы ω_i^j удовлетворяют соотношениям

$$\omega_i^j+\omega_j^i=0, \tag{1.2}$$

вытекающим из условий ортонормальности репера R:

$$\langle\bar{e}_i;\bar{e}_j\rangle=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases} \tag{1.3}$$

Здесь символом $\langle\bar{x};\bar{y}\rangle$ обозначается скалярное произведение векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ пространства E_n.

Как указано в [4, п. 1.4], с евклидовым пространством E_n ассоциируется $(p+N)$-мерное расслоенное пространство $R_{p,N}=(M_p,Q_N)$ с базой M_p и слоями Q_N. Здесь M_p – p-мерное дифференцируемое многообразие с базовыми формами θ^a $(a,b,c=\overline{1,p})$, удовлетворяющими структурным уравнениям [4, (1.1)]. Каждый слой, отвечающий точке $B(u^a)\in M_p$, представляет собой грассманово многообразие всех m-плоскостей

$$l_m=(\bar{A},\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_m) \tag{1.4}$$

пространства E_n с базовыми формами $\omega^{\hat{\alpha}}$, $\omega_\alpha^{\hat{\alpha}}=-\omega_{\hat{\alpha}}^\alpha$ $(\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,m};\ \hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma}=\overline{m+1,n})$, удовлетворяющими структурным уравнениям [4, (1.7)]. В расслоенном пространстве $R_{p,N}$, где число N определяется по формуле [4, (1.5)], как и в [1, п. 1.4)], задаётся сечение: $B(u^a)\in M_p\mapsto l_m\in Q_N$. В результате получается секущая поверхность S_p^m – p-мерное многообразие m-плоскостей (1.4) в E_n [4, замечание 1.3]. Эта секущая поверхность определяется системой дифференциальных уравнений [4, (1.8)]:

$$\omega^{\hat{\alpha}}=A_a^{\hat{\alpha}}\theta^a,\; \omega_\alpha^{\hat{\alpha}}=A_{\alpha a}^{\hat{\alpha}}\theta^a=-\omega_{\hat{\alpha}}^\alpha=-A_{\hat{\alpha}a}^{\alpha}\theta^a,$$
$$a,b,c=\overline{1,p}, \tag{1.5}$$

где величины $A_a^{\hat{\alpha}}$ и $A_{\alpha a}^{\hat{\alpha}}=-A_{\hat{\alpha}a}^{\alpha}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям [4, (1.9)]. Как и в [4] предполагается, что числа p, m и n удовлетворяют неравенствам [4, (1.11)]:

$$1<p<N. \tag{1.6}$$

2. Двумерные площадки в линейных подпространствах l_m, P_{n-m} и L_p

2.1. В статье [4] показано, что каждой точке $B(u^a)$ базы M_p в соответствующей m-плоскости $l_m\in S_p^m$ отвечает в общем случае одна точка G_1 (первый центр), координаты x^α которой определяются системой линейных уравнений [4, (3.6)], где величины A^α и A_α^β определяются по формулам [4, (2.1)]. Поэтому всегда можно провести такую канонизацию ортонормального репера R, при которой точка $A\in l_m$ окажется первым центром G_1. Однако в данной статье такую канонизацию репера R проводить не будем, будем предполагать точку $A\in l_m$, отвечающую точке $B(u^a)\in M_p$, заданной. Тогда кроме дифференциальных уравнений (1.5) на базе M_p будут выполняться дифференциальные уравнения

$$\omega^{\alpha} = A^{\alpha}_{a}\theta^{a}, \qquad (2.1)$$

где в силу (1.1) величины A^{α}_{a} удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dA^{\alpha}_{a} + A^{\beta}_{a}\omega^{\alpha}_{\beta} - A^{\alpha}_{b}\theta^{b}_{a} = \tilde{A}^{\alpha}_{ab}\theta^{b}. \qquad (2.2)$$

Поскольку теперь точка $A\in l_m$, отвечающая точке $B(u^a)\in M_p$, задана, то точке $B(u^a)$ можно с учётом (1.4), (1.3) и (1.1) сопоставить $(n-m)$-плоскость

$$P_{n-m} = (\bar{A}, \bar{e}_{m+1}, \ldots, \bar{e}_{n}), \qquad (2.3)$$

ортогональную m-плоскости l_m. Поэтому с этой $(n-m)$-плоскостью P_{n-m} можно связать величины, аналогичные (2.2). В частности, на базе M_p можно рассмотреть с учётом (2.1) и (1.5) величины

$$A^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}} = \frac{1}{2}A^{\alpha}_{\hat{\alpha}(a}A^{\hat{\beta}}_{|\alpha|\beta)}A^{ab}, \qquad (2.4)$$

которые в силу (2.2) и [4, (2.3–2.5)] удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dA^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}} + A^{\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}}\omega^{\hat{\beta}}_{\hat{\gamma}} - A^{\hat{\beta}}_{\hat{\gamma}}\omega^{\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}} = A^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}a}\theta^{a}.$$

Здесь явный вид величин, стоящих при θ^{a}, для нас несущественный. Поэтому величины (2.4) образуют смешанный тензор в смысле Г.Ф. Лаптева [2]. Как показано в [4, (2.9), (3.9)], тензор $\{A^{\beta}_{\alpha}\}$ определяет линейный оператор $\Pi=\{A^{\beta}_{\alpha}\}:l_m\to l_m$, который с учётом [4, (3.10)] в общем случае является невырожденным на базе M_p. Аналогично показывается, что величины (2.4) определяют линейный оператор

$$\hat{\Pi} = \{A^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}}\}: P_{n-m} \to P_{n-m}, \qquad (2.5)$$

являющийся в общем случае невырожденным на базе M_p:

$$\det[A^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}}] \neq 0. \qquad (2.6)$$

Заметим с учётом (2.5) и [4, (3.10)], что линейные операторы Π и $\hat{\Pi}$ можно рассматривать в каждой точке $B(u^a)\in M_p$ как невырожденные в силу (2.6) и [4, (3.10)] центроаффинные преобразования соответствующих линейных подпространств.

2.2. В [4] показано, что каждому направлению [4, (3.2)] в L_p отвечает симметрический линейный оператор [4, (3.6)]:

$$\Pi(t) = \{A^{\beta}_{\alpha ab}t^{a}t^{b}\}: l_m \to l_m, \qquad (2.7)$$

где

$$A^{\beta}_{\alpha ab} = \frac{1}{2}A^{\hat{\alpha}}_{\alpha(a}A^{\beta}_{|\hat{\alpha}|b)}. \qquad (2.8)$$

Из (2.7) с учётом [4, (3.9)] заключаем, что совокупность всех направлений [4, (3.2)] $\bar{t}=(\bar{B},\bar{\varepsilon}_a)t^a\in L_p$, которым отвечают линейные операторы Π и $\breve{\Pi}(t)=\Pi\cdot\Pi(t):l_m\to l_m$ с нулевыми следами, образует в L_p гиперконусы K_{p-1} [4, (3.7)] и K^{*}_{p-1} второго порядка с вершиной $B(u^a)\in L_p$:

$$K_{p-1}: A_{ab}t^{a}t^{b} = 0,\ K^{*}_{p-1}: B_{ab}t^{a}t^{b} = 0,$$
$$A_{ab} = A^{\alpha}_{\alpha ab},\ B_{ab} = A^{\gamma}_{\alpha}A^{\alpha}_{\gamma ab}, \qquad (2.9)$$

причём компоненты тензоров A_{ab} и B_{ab} удовлетворяют дифференциальным уравнениям [4, (2.2)] и уравнениям:

$$dB_{ab} - B_{cb}\theta^{c}_{a} - B_{ac}\theta^{c}_{a} = B_{abc}\theta^{c}. \qquad (2.10)$$

Здесь явный вид величин B_{abc} для нас несущественный.

Из (2.9) и [4, (3.7)] с учётом [4, (2.1)] и (2.10) следует, что каждой точке $B(u^a)\in M_p$ отвечает центроаффинное преобразование пространства L_p, порождаемое гиперконусами K_{p-1} и K^{*}_{p-1}:

$$\mathrm{P} = \{B^{b}_{a}\},\ B^{b}_{a} = B_{ac}A^{cb},\ dB^{b}_{a} + B^{c}_{a}\theta^{b}_{c} - B^{b}_{c}\theta^{c}_{a} = B^{b}_{ac}\theta^{c}. \qquad (2.11)$$

Здесь явный вид величин B^{b}_{ac} для нас несущественный.

2.3. Отмеченные в данном пункте 2 центроаффинные преобразования $\Pi:l_m\to l_m$, $\hat{\Pi}:P_{n-m}\to P_{n-m}$, $\mathrm{P}:L_p\to L_p$, отвечающие точке $B(u^a)\in M_p$, дают возможность определить двумерные площадки $l^1_2\subset l_m$, $l^2_2\subset P_{n-m}$ и $L^{*}_2\subset L_p$.

В дальнейшем будет использована следующая система индексов:

$$\begin{gathered}
\alpha, \beta, \gamma, \sigma = \overline{1, m};\quad \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\sigma} = \overline{m+1, n};\\
a, b, c, e = \overline{1, p};\quad \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \sigma_1 = 1, 2;\\
\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \sigma_2 = \overline{3, m};\ \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\gamma}_1, \hat{\sigma}_1 = \overline{m+1, m+2};\\
\hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2, \hat{\gamma}_2, \hat{\sigma}_2 = \overline{m+3, n};\ a_1, b_1, c_1, e_1 = 1, 2;\\
a_2, b_2, c_2, e_2 = \overline{3, p}.
\end{gathered} \qquad (2.12)$$

Каждой точке $B(u^a)\in M_p$ сопоставим нижеследующие двумерные плоскости, определённые соответствующими линейными уравнениями:

$$\begin{gathered}
l^1_2 \subset l_m \Leftrightarrow x^{\alpha_2} = g^{\alpha_2}_{\alpha_1}x^{\alpha_1},\quad x^{\hat{\alpha}} = 0;\\
l^2_2 \subset P_{n-m} \Leftrightarrow x^{\hat{\alpha}_2} = g^{\hat{\alpha}_2}_{\hat{\alpha}_1}x^{\hat{\alpha}_1},\quad x^{\alpha} = 0;\\
L^{*}_2 \subset L_p \Leftrightarrow t^{a_2} = h^{a_2}_{a_1}t^{a_1}.
\end{gathered} \qquad (2.13)$$

Здесь величины $g^{\alpha_2}_{\alpha_1}$, $g^{\hat{\alpha}_2}_{\hat{\alpha}_1}$ и $h^{a_2}_{a_1}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\begin{gathered}
dg^{\alpha_2}_{\alpha_1} + g^{\beta_2}_{\alpha_1}\omega^{\alpha_2}_{\beta_2} - g^{\alpha_2}_{\beta_1}\omega^{\beta_1}_{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2}_{\alpha_1} = g^{\alpha_2}_{\alpha_1 a}\theta^{a};\\
dg^{\hat{\alpha}_2}_{\hat{\alpha}_1} + g^{\hat{\beta}_2}_{\hat{\alpha}_1}\omega^{\hat{\alpha}_2}_{\hat{\beta}_2} - g^{\hat{\alpha}_2}_{\hat{\beta}_1}\omega^{\hat{\beta}_1}_{\hat{\alpha}_1} + \omega^{\hat{\alpha}_2}_{\hat{\alpha}_1} = g^{\hat{\alpha}_2}_{\hat{\alpha}_1 a}\theta^{a};\\
dh^{a_2}_{a_1} + h^{b_2}_{a_1}\theta^{a_2}_{b_2} - h^{a_2}_{b_1}\theta^{b_1}_{a_1} + \theta^{a_2}_{a_1} = h^{a_2}_{a_1 a}\theta^{a}.
\end{gathered} \qquad (2.14)$$

Из [4, (3.9)], (2.5, 2.6 и 2.9) с учётом (2.13) заключаем, что 1) плоскость $l^1_2\subset l_m$, проходящая через точку A; 2) плоскость $l^2_2\subset P_{n-m}$, проходящая через точку A; 3) двумерная площадка $L^{*}_2\ni B(u^a)$ в L_p, соответственно параллельна двумерному направлению, неподвижному 1) при линейном операторе $\Pi:l_m\to l_m$, 2) при линейном операторе $\hat{\Pi}:P_{n-m}\to P_{n-m}$, 3) при центроаффинном преобразовании $\mathrm{P}:L_p\to L_p$ тогда и только тогда, когда величины $g^{\alpha_2}_{\alpha_1}$, $g^{\hat{\alpha}_2}_{\hat{\alpha}_1}$ и $h^{a_2}_{a_1}$ удовлетворяют алгебраическим уравнениям, соответственно:

$$\begin{gathered}
l^1_2: \varphi^{\alpha_2}_{\alpha_1} \equiv A^{\beta_1}_{\beta_2}g^{\beta_2}_{\alpha_1}g^{\alpha_2}_{\beta_1} + A^{\alpha_2\beta_1}_{\alpha_1\beta_2}g^{\beta_2}_{\beta_1} - A^{\alpha_2}_{\alpha_1} = 0,\\
A^{\alpha_2}_{\alpha_1} = A^{\alpha_1}_{\alpha_2},\quad A^{\alpha_2\beta_1}_{\alpha_1\beta_2} = A^{\beta_1}_{\alpha_1}\delta^{\alpha_2}_{\beta_2} - A^{\alpha_2}_{\beta_2}\delta^{\beta_1}_{\alpha_1};
\end{gathered} \qquad (2.15)$$

$$\begin{gathered}
l^2_2: \varphi^{\hat{\alpha}_2}_{\hat{\alpha}_1} \equiv A^{\hat{\beta}_1}_{\hat{\beta}_2}g^{\hat{\beta}_2}_{\hat{\alpha}_1}g^{\hat{\alpha}_2}_{\hat{\beta}_1} + A^{\hat{\alpha}_2\hat{\beta}_1}_{\hat{\alpha}_1\hat{\beta}_2}g^{\hat{\beta}_2}_{\hat{\beta}_1} - A^{\hat{\alpha}_2}_{\hat{\alpha}_1} = 0,\\
A^{\hat{\alpha}_2}_{\hat{\alpha}_1} = A^{\hat{\alpha}_1}_{\hat{\alpha}_2},\quad A^{\hat{\alpha}_2\hat{\beta}_1}_{\hat{\alpha}_1\hat{\beta}_2} = A^{\hat{\beta}_1}_{\hat{\alpha}_1}\delta^{\hat{\alpha}_2}_{\hat{\beta}_2} - A^{\hat{\alpha}_2}_{\hat{\beta}_2}\delta^{\hat{\beta}_1}_{\hat{\alpha}_1};
\end{gathered} \qquad (2.16)$$

$$L_2^*:\psi_{a_1}^{a_2}\equiv B_{b_2}^{b_1}h_{a_1}^{b_2}h_{b_1}^{a_2}+B_{a_1b_2}^{a_2b_1}h_{b_1}^{b_2}-B_{a_1}^{a_2}=0,$$
$$B_{a_1b_2}^{a_2b_1}=B_{a_1}^{b_1}\delta_{b_2}^{a_2}-B_{b_2}^{a_2}\delta_{a_1}^{b_1}. \qquad (2.17)$$

Замечание 2.1. Каждая из систем неоднородных алгебраических уравнений (2.15, 2.16 и 2.17) имеет в общем случае конечное число решений относительно $g_{\alpha_1}^{\alpha_2}$, $g_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\alpha}_2}$ и $h_{a_1}^{a_2}$ в силу геометрического выбора соответствующих плоскостей $l_2^1\subset l_m$, $l_2^2\subset P_{n-m}$ и $L_2^*\subset L_p$. Этот результат также вытекает из того, что в общем случае на базе M_p каждый из нижеследующих определителей, как можно показать, не равен нулю:

1) $$D\equiv\det\left[A_{\alpha_1\beta_2}^{\alpha_2\beta_1}\right]. \qquad (2.18)$$

Здесь пара $\binom{\beta_1}{\beta_2}$ указывает на номер строки, а пара $\binom{\alpha_1}{\alpha_2}$ – на номер столбца.

2) $$\hat{D}\equiv\det\left[A_{\hat{\alpha}_1\hat{\beta}_2}^{\hat{\alpha}_2\hat{\beta}_1}\right]. \qquad (2.19)$$

Здесь пара $\binom{\hat{\beta}_1}{\hat{\beta}_2}$ указывает на номер строки, а пара $\binom{\hat{\alpha}_1}{\hat{\alpha}_2}$ – на номер столбца.

3) $$L\equiv\det\left[B_{a_1b_2}^{a_2b_1}\right]. \qquad (2.20)$$

Здесь пара $\binom{b_1}{b_2}$ указывает на номер строки, а пара $\binom{a_1}{a_2}$ – на номер столбца.

Неравенство нулю на базе M_p каждого из определителей (2.18–2.20) в общем случае обеспечивает алгебраическую независимость уравнений (2.15–2.17), что и приводит к конечному числу решений относительно $g_{\alpha_1}^{\alpha_2}$, $g_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\alpha}_2}$ и $h_{a_1}^{a_2}$.

Замечание 2.2. Из (2.13) замечаем, что

$$l_2^1=(\bar{A},\bar{\varepsilon}_1^*,\bar{\varepsilon}_2^*)\subset l_m,\ l_2^2=(\bar{A},\bar{\varepsilon}_{m+1}^*,\bar{\varepsilon}_{m+2}^*)\subset P_{n-m}, \qquad (2.21)$$

где $$\bar{\varepsilon}_{\alpha_1}^*=\bar{e}_{\alpha_1}+g_{\alpha_1}^{\alpha_2}\bar{e}_{\alpha_2},\ \bar{\varepsilon}_{\hat{\alpha}_1}^*=\bar{e}_{\hat{\alpha}_1}+g_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\alpha}_2}\bar{e}_{\hat{\alpha}_2}. \qquad (2.22)$$

Из (2.21) и (2.22) с учётом (1.3) следует, что каждой точке $B(u^a)\in M_p$ отвечают линейные подпространства

$$\tilde{l}_{m-2}=(\bar{A},\bar{\varepsilon}_3^*,\ldots,\bar{\varepsilon}_m^*)\perp l_2^1,\quad \tilde{l}_{m-2}\cup l_2^1=l_m, \qquad (2.23)$$

$$\tilde{P}_{n-m-2}=(\bar{A},\bar{\varepsilon}_{m+3}^*,\ldots,\bar{\varepsilon}_n^*)\perp l_2^2,\ \tilde{P}_{n-m-2}\cup l_2^2=P_{n-m},$$

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha_2}^*=\bar{e}_{\alpha_2}+g_{\alpha_2}^{\alpha_1}\bar{e}_{\alpha_1},\quad \bar{\varepsilon}_{\hat{\alpha}_2}^*=\bar{e}_{\hat{\alpha}_2}+g_{\hat{\alpha}_2}^{\hat{\alpha}_1}\bar{e}_{\hat{\alpha}_1},$$

где $$g_{\alpha_1}^{\alpha_2}=-g_{\alpha_2}^{\alpha_1},\quad g_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\alpha}_2}=-g_{\hat{\alpha}_2}^{\hat{\alpha}_1}. \qquad (2.24)$$

3. Отображения $f(t):l_2^1\to l_2^2$ и $\hat{f}(t):l_2^2\to l_2^1$ в направлении $t\in L_p$

3.1. Определение и геометрический смысл отображений $f(t)$ и $\hat{f}(t)$

Каждой точке $B(u^a)\in M_p$ сопоставим точки $X_1\in l_2^1\subset l_m$ и $X_2\in l_2^2\subset P_{n-m}$ с радиус-векторами

$$\bar{X}_1=\bar{A}+x^{\alpha_1}\bar{\varepsilon}_{\alpha_1}^*,\quad \bar{X}_2=\bar{A}+x^{\hat{\alpha}_1}\bar{\varepsilon}_{\hat{\alpha}_1}^*. \qquad (3.1)$$

Из (3.1) с учётом (2.21), (2.22), (2.1), [4, (3.1)] и [4, (1.2), (1.4), (1.8)] получаем

$$d\bar{X}_1=(\cdots)^{\alpha}\bar{\varepsilon}_{\alpha}^*+(\cdots)^{\hat{\alpha}_2}\bar{e}_{\hat{\alpha}_2}+(G_a^{\hat{\alpha}_1}+x^{\alpha_1}G_{\alpha_1a}^{\hat{\alpha}_1})t^a\theta\bar{\varepsilon}_{\hat{\alpha}_1}^*,$$
$$d\bar{X}_2=(\cdots)^{\hat{\alpha}}\bar{\varepsilon}_{\hat{\alpha}}^*+(\cdots)^{\alpha_2}\bar{\varepsilon}_{\alpha_2}^*+(G_a^{\alpha_1}+x^{\hat{\alpha}_1}G_{\hat{\alpha}_1a}^{\alpha_1})t^a\theta\bar{\varepsilon}_{\alpha_1}^*. \qquad (3.2)$$

Здесь символ $(\cdots)$ означает несущественные выражения, а величины, стоящие в круглых скобках при векторах $\bar{\varepsilon}_{\alpha_1}^*$ и $\bar{\varepsilon}_{\hat{\alpha}_1}^*$, определяются по формулам:

$$G_a^{\hat{\alpha}_1}=A_a^{\hat{\alpha}_1}+g_{\hat{\alpha}_2}^{\hat{\alpha}_1}A_a^{\hat{\alpha}_2},\ G_a^{\alpha_1}=A_a^{\alpha_1}+g_{\alpha_2}^{\alpha_1}A_a^{\alpha_2},$$
$$G_{\alpha_1a}^{\hat{\alpha}_1}=A_{\alpha_1a}^{\hat{\alpha}_1}+g_{\hat{\alpha}_2}^{\hat{\alpha}_1}A_{\alpha_1a}^{\hat{\alpha}_2}+g_{\alpha_1}^{\alpha_2}A_{\alpha_2a}^{\hat{\alpha}_1}+A_{\alpha_2a}^{\hat{\alpha}_2}g_{\alpha_1}^{\alpha_2}g_{\hat{\alpha}_2}^{\hat{\alpha}_1}, \qquad (3.3)$$
$$G_{\hat{\alpha}_1a}^{\alpha_1}=A_{\hat{\alpha}_1a}^{\alpha_1}+g_{\alpha_2}^{\alpha_1}A_{\hat{\alpha}_1a}^{\alpha_2}+g_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\alpha}_2}A_{\hat{\alpha}_2a}^{\alpha_1}+A_{\hat{\alpha}_2a}^{\alpha_2}g_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\alpha}_2}g_{\alpha_2}^{\alpha_1}$$

и в силу (1.5), (2.2) и (2.14) удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dG_a^{\hat{\alpha}_1}+G_a^{\hat{\beta}_1}\omega_{\hat{\beta}_1}^{\hat{\alpha}_1}-G_b^{\hat{\alpha}_1}\theta_a^b=G_{ab}^{\hat{\alpha}_1}\theta^b,$$
$$dG_a^{\alpha_1}+G_a^{\beta_1}\omega_{\beta_1}^{\alpha_1}-G_b^{\alpha_1}\theta_a^b=G_{ab}^{\alpha_1}\theta^b,$$
$$dG_{\alpha_1a}^{\hat{\alpha}_1}+G_{\alpha_1a}^{\hat{\beta}_1}\omega_{\hat{\beta}_1}^{\hat{\alpha}_1}-G_{\beta_1a}^{\hat{\alpha}_1}\omega_{\alpha_1}^{\beta_1}-G_{\alpha_1b}^{\hat{\alpha}_1}\theta_a^b=G_{\alpha_1ab}^{\hat{\alpha}_1}\theta^b,$$
$$dG_{\hat{\alpha}_1a}^{\alpha_1}+G_{\hat{\alpha}_1a}^{\beta_1}\omega_{\beta_1}^{\alpha_1}-G_{\hat{\beta}_1a}^{\alpha_1}\omega_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\beta}_1}-G_{\hat{\alpha}_1b}^{\alpha_1}\theta_a^b=G_{\hat{\alpha}_1ab}^{\alpha_1}\theta^b.$$

Здесь явный вид величин, стоящих при θ^b, для нас несущественный.

Из (3.2) замечаем, что каждому направлению $t\in L_p$, касательному к кривой $k(t)$ на базе M_p, проходящей через точку $B(u^a)\in M_p$, отвечают точки $Y_1\in l_2^1$ и $Y_2\in l_2^2$ с радиус-векторами

$$\bar{Y}_1=\bar{A}+y^{\alpha_1}\bar{\varepsilon}_{\alpha_1}^*,\quad \bar{Y}_2=\bar{A}+y^{\hat{\alpha}_1}\bar{\varepsilon}_{\hat{\alpha}_1}^*, \qquad (3.4)$$

где

$$y^{\hat{\alpha}_1}=(G_a^{\hat{\alpha}_1}+x^{\alpha_1}G_{\alpha_1a}^{\hat{\alpha}_1})t^a,\quad y^{\alpha_1}=(G_a^{\alpha_1}+x^{\hat{\alpha}_1}G_{\hat{\alpha}_1a}^{\alpha_1})t^a. \qquad (3.5)$$

Таким образом, каждому направлению $t\in L_p$ в точке $B(u^a)\in M_p$ отвечают линейные отображения

$$f(t):l_2^1\to l_2^2\Leftrightarrow f(t)X_1=Y_2,$$
$$\hat{f}(t):l_2^2\to l_2^1\Leftrightarrow \hat{f}(t)X_2=Y_1 \qquad (3.6)$$
$$(t-\text{фиксировано}).$$

Каждое из этих отображений определяется соответствующими функциями (3.5) (при фиксированных t^a) и в силу (3.2), (2.22), [4, (3.2), (3.13)], (2.3, 3.4 и 1.5) геометрически характеризуется следующим образом

$$\{T(X_1)_{k(t)}\cup l_m\cup\tilde{P}_{n-m-2}\}\cap l_2^2=Y_2,$$
$$\{T(X_2)_{k(t)}\cup P_{n-m}\cup\tilde{l}_{m-2}\}\cap l_2^1=Y_1.$$

Здесь из рассмотрения исключается случай, когда точки $X_1\in l_m$ и $X_2\in P_{n-m}$, отвечающие точке $B(u^a)\in M_p$, являются фокусами в смысле [5] линейных подпространств l_m и P_{n-m} вдоль кривой $k(t)$ на базе M_p расслоения $R_{p,N}$.

3.2. Отображения $f(t)\to f_a(t)$ и $\hat{f}(t)\to\hat{f}_a(t)$

Каждое из отображений (3.6), отвечающих точке $B(u^a)\in M_p$, при фиксированных t^a определяется соответствующими двумя функциями двух аргументов.

***Определение* 3.1.** Отображение $f(t):l_2^1\to l_2^2$ ($\hat{f}(t):l_2^2\to l_2^1$), отвечающее точке $B(u^a)\in M_p$, называется отображением $f_a(t)$ ($\hat{f}_a(t)$), т.е. $f(t)\to f_a(t)$ ($\hat{f}(t)\to\hat{f}_a(t)$)

(t – фиксировано), если соответствующие две функции двух аргументов, его определяющие, удовлетворяют условиям Коши-Римана [6. С. 43–44]:

$$\frac{\partial y^{m+1}}{\partial x^1}=\frac{\partial y^{m+2}}{\partial x^2},\ \frac{\partial y^{m+2}}{\partial x^1}=-\frac{\partial y^{m+1}}{\partial x^2}$$

$$\left(\frac{\partial y^1}{\partial x^{m+1}}=\frac{\partial y^2}{\partial x^{m+2}},\ \frac{\partial y^2}{\partial x^{m+1}}=-\frac{\partial y^1}{\partial x^{m+2}}\right). \qquad (3.7)$$

Из (3.7) и (3.5) с учётом (3.3), (1.5) и (1.2) вытекает

Утверждение 3.1. Отображение $f(t):l_2^1\to l_2^2$, отвечающее точке $B(u^a)\in M_p$, будет отображением $f_a(t)$, т.е. $f(t)\to f_a(t)$, тогда и только тогда, когда

$$\widehat{f}(t)\to\widehat{f}_a(t)\Leftrightarrow\begin{cases}(G_{1a}^{m+1}-G_{2a}^{m+2})t^a=0,\\(G_{2a}^{m+1}+G_{1a}^{m+2})t^a=0,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(G_{m+1,a}^1-G_{m+2,a}^2)t^a=0,\\(G_{m+2,a}^1+G_{m+1,a}^2)t^a=0.\end{cases} \qquad (3.8)$$

(при фиксированных t^a).

Теорема 3.1. Каждой паре плоскостей $l_2^1\subset l_m$ и $l_2^2\subset P_{n-m}$, отвечающих точке $B(u^a)\in M_p$, в центроаффинном пространстве L_p в общем случае соответствует (p–2)-мерное подпространство

$$\Gamma_{p-2}=\{t\in L_p\mid f(t)\to f_a(t):l_2^1\to l_2^2\}\ni B. \qquad (3.9)$$

Доказательство. Будем предполагать, что на базе M_p

$$\mathrm{Rang}\begin{bmatrix}G_{1a}^{m+1}-G_{2a}^{m+2}\\G_{2a}^{m+1}+G_{1a}^{m+2}\end{bmatrix}=2\ \ (a\text{ – номер столбцов}). \qquad (3.10)$$

Поэтому система (3.8) состоит из двух линейных однородных уравнений с p неизвестными t^a и, следовательно, определяет в L_p линейное подпространство (3.9).

Замечание 3.1. Пусть в каждой точке $B(u^a)\in M_p$ линейное подпространство (3.9) задаётся уравнениями:

$$\Gamma_{p-2}:t^{a_1}=h_{a_2}^{a_1}t^{a_2}, \qquad (3.11)$$

где $h_{a_2}^{a_1}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dh_{a_2}^{a_1}+h_{a_2}^{b_1}\theta_{b_1}^{a_1}-h_{b_2}^{a_1}\theta_{a_2}^{b_2}+\theta_{a_2}^{a_1}=h_{a_2a}^{a_1}\theta^a.$$

Из (3.11, 2.13, 2.9, 2.23 и 2.24) следует, что плоскость $L_2^*\subset L_p$ и (p–2)-плоскость $\Gamma_{p-2}\subset L_p$ полярно сопряжены относительно гиперконуса K_{p-1} тогда и только тогда, когда

$$A_{a_2b_1}h_{b_2}^{b_1}h_{a_1}^{a_2}+A_{a_1b_1}h_{b_2}^{b_1}+A_{a_2b_2}h_{a_1}^{a_2}+A_{a_1b_2}=0. \qquad (3.12)$$

Если величины $h_{a_2}^{a_1}$ с учётом (3.11) и (3.10) определить из системы (3.8), то из системы (3.12) в общем случае алгебраически независимых 2(p–2) уравнений можно определить величины $h_{a_2}^{a_1}$ в каждой точке $B(u^a)\in M_p$, с которыми в силу (2.13) ассоциируется плоскость $L_2^*\subset L_p$. Таким образом, с каждой парой плоскостей $l_2^1\subset l_m$ и $l_2^2\subset P_{n-m}$, отвечающих точке $B(u^a)\in M_p$, ассоциируется в L_p двумерная плоскость $L_2^*\subset L_p$, полярно сопряжённая (p–2)-плоскости $\Gamma_{p-2}\subset L_p$ относительно гиперконуса $K_{p-1}\subset L_p$.

3.3. Случай $n=p+4$

Теорема 3.2. В общем случае при выполнении условий

$$n=p+4,\ 1<p<(m+1)(p+4-m) \qquad (3.13)$$

в каждой точке $B(u^a)\in M_p$ существует конечное число плоскостей $l_2^1\subset l_m$ и $l_2^2\subset P_{n-m}$ таких, что

$$f(t)\to f_a(t):l_2^1\to l_2^2,\quad\forall t\in L_p. \qquad (3.14)$$

Доказательство. Из (3.8) следует, что величины $g_{\alpha_1}^{\alpha_2}$ и $g_{\widehat{\alpha}_1}^{\widehat{\alpha}_2}$, общее число которых равно

$$n^*=2(n-4), \qquad (3.15)$$

определяют плоскости $l_2^1\to l_2^2$, о которых идёт речь в (3.14), удовлетворяют с учётом (3.3) следующей системе неоднородных алгебраических уравнений:

$$\varphi_a\equiv A_{\alpha_2a}^{\widehat{\alpha}_2}(g_1^{\alpha_2}g_{\widehat{\alpha}_2}^{m+1}-g_2^{\alpha_2}g_{\widehat{\alpha}_2}^{m+2})+$$
$$+A_{1a}^{\widehat{\alpha}_2}g_{\widehat{\alpha}_2}^{m+1}-A_{\alpha_2a}^{m+2}g_2^{\alpha_2}+A_{1a}^{m+1}-A_{2a}^{m+2}=0, \qquad (3.16)$$

$$\psi_a\equiv A_{\alpha_2a}^{\widehat{\alpha}_2}(g_1^{\alpha_2}g_{\widehat{\alpha}_2}^{m+2}+g_2^{\alpha_2}g_{\widehat{\alpha}_2}^{m+1})+A_{1a}^{\widehat{\alpha}_2}g_{\widehat{\alpha}_2}^{m+2}+$$
$$+A_{\alpha_2a}^{m+1}g_2^{\alpha_2}+A_{1a}^{m+2}-A_{2a}^{m+1}=0,\quad(a=\overline{1,p}).$$

Заметим, что система (3.16) состоит из $2p$ алгебраических уравнений и содержит $n^*=2(n-4)$ неизвестных $g_{\alpha_1}^{\alpha_2}$ и $g_{\widehat{\alpha}_1}^{\widehat{\alpha}_2}=-g_{\alpha_1}^{\widehat{\alpha}_2}$. В случае же $n=p+4$ эта система обладает одинаковым числом $2p$ уравнений и n^* неизвестных. Можно показать, что ранг якобиевой матрицы

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\varphi_a}{\partial g_{\alpha_1}^{\alpha_2}} & \dfrac{\partial\varphi_a}{\partial g_{\widehat{\alpha}_2}^{\widehat{\alpha}_1}}\\[2ex]\dfrac{\partial\psi_a}{\partial g_{\alpha_1}^{\alpha_2}} & \dfrac{\partial\psi_a}{\partial g_{\widehat{\alpha}_2}^{\widehat{\alpha}_1}}\end{bmatrix}$$

при $n^*=2p$ в общем случае на базе M_p равен $2p$. Это означает, что система (3.16) состоит в общем случае из $2p$ алгебраически независимых уравнений. Поэтому она допускает в общем случае конечное число решений относительно $g_{\alpha_1}^{\alpha_2}$ и $g_{\widehat{\alpha}_1}^{\widehat{\alpha}_2}=-g_{\alpha_1}^{\widehat{\alpha}_2}$, что в силу (2.17) и (1.6) и в соответствии с (3.13) и доказывает настоящую теорему.

3.4. Случай $n>p+4$

Теорема 3.3. В общем случае при выполнении неравенств

$$n>p+4,\ 1<p<(m+1)(n-m) \qquad (3.17)$$

в каждой точке $B(u^a)\in M_p$ существует бесчисленное множество плоскостей $l_2^1\subset l_m$ и $l_2^2\subset P_{n-m}$ таких, что

$$f(t)\to f_a(t):l_2^1\to l_2^2,\quad\forall t\in L_p.$$

Доказательство данной теоремы вытекает из того, что в случае (3.17) с учётом (3.15) система (3.16) содержит неизвестных больше, чем уравнений, входящих в эту систему.

3.5. Случай $n<p+4$

В предыдущих пунктах было показано существование в каждой точке $B(u^a)\in M_p$ в общем случае при

$n \geq p+4$ конечного или бесконечного числа пар плоскостей $l_2^1 \subset l_m$ и $l_2^2 \subset P_{n-m}$ типа (3.14). В этом пункте будет показано существование аналогичных пар плоскостей в каждой точке $B(u^a) \in M_p$ при выполнении неравенств

$$n<p+4, \quad 1<p<(m+1)(n-m). \qquad (3.18)$$

Из (3.16) с учётом (3.15) и (3.18) замечаем, что в рассматриваемом случае указанные пары плоскостей $l_2^1 \subset l_m$ и $l_2^2 \subset P_{n-m}$ определяются системой алгебраических уравнений, у которой число n^* неизвестных $g_{\alpha_1}^{\alpha_2}$ и $g_{\hat\alpha_1}^{\hat\alpha_2} = -g_{\hat\alpha_2}^{\hat\alpha_1}$ меньше числа $2p$ уравнений. Поэтому в данном случае существование этих пар плоскостей l_2^1 и l_2^2 типа (3.14) может быть обеспечено только в некотором частном случае многообразия S_p^m – p-семейства m-плоскостей l_m в E_n. Такое многообразие S_p^m обозначим $\tilde{S}_p^m$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.4. Многообразие $\tilde{S}_p^m$ – многообразие S_p^m в E_n, у которого в каждой точке $B(u^a) \in M_p$ при $n<p+4$ имеется хотя бы одна пара двумерных плоскостей $l_2^1 \subset l_m$ и $l_2^2 \subset P_{n-m}$ типа: $f(t) \rightarrow f_a(t): l_2^1 \rightarrow l_2^2$, $\forall t \in L_p$, всегда существует.

Доказательство. Точке $B(u^a) \in M_p$ сопоставим плоскости $l_2^1 \subset l_m$ и $l_2^2 \subset P_{n-m}$. Для упрощения дальнейших аналитических выкладок и геометрических рассуждений проведём в точке $B(u^a) \in M_p$ такую канонизацию ортонормального репера R, при которой

$$g_{\alpha_2}^{\alpha_1} \equiv g_{\alpha_1}^{\alpha_2} = 0, \quad g_{\hat\alpha_1}^{\hat\alpha_2} \equiv -g_{\hat\alpha_2}^{\hat\alpha_1} = 0, \qquad (3.19)$$

что в силу (2.14) приводит к дифференциальным уравнениям:

$$\omega_{\alpha_1}^{\alpha_2} = g_{\alpha_1 a}^{\alpha_2} \theta^a, \quad \omega_{\hat\alpha_1}^{\hat\alpha_2} = g_{\hat\alpha_1 a}^{\hat\alpha_2} \theta^a, \qquad (3.20)$$

где величины $g_{\alpha_1 a}^{\alpha_2}$ и $g_{\hat\alpha_1 a}^{\hat\alpha_2}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dg_{\alpha_1 a}^{\alpha_2} + g_{\alpha_1 a}^{\beta_2} \omega_{\beta_2}^{\alpha_2} - g_{\beta_1 a}^{\alpha_2} \omega_{\alpha_1}^{\beta_1} - g_{\alpha_1 b}^{\alpha_2} \theta_a^b = g_{\alpha_1 ab}^{\alpha_2} \theta^b,$$

$$dg_{\hat\alpha_1 a}^{\hat\alpha_2} + g_{\hat\alpha_1 a}^{\hat\beta_2} \omega_{\hat\beta_2}^{\hat\alpha_2} - g_{\hat\beta_1 a}^{\hat\alpha_2} \omega_{\hat\alpha_1}^{\hat\beta_1} - g_{\hat\alpha_1 b}^{\hat\alpha_2} \theta_a^b = g_{\hat\alpha_1 ab}^{\hat\alpha_2} \theta^b.$$

Здесь явный вид величин, стоящих при θ^b, для нас несущественный. Из (2.21) и (2.22) в силу (3.19) получаем

$$l_2^1 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2), \quad l_2^2 = (\bar{A}, \bar{e}_{m+1}, \bar{e}_{m+2}). \qquad (3.21)$$

Пусть плоскости (3.21) удовлетворяют условию (3.14). Тогда из (3.16) в силу (3.19) получаем, что многообразие $\tilde{S}_p^m$, о котором идёт речь в настоящей теореме, характеризуется соотношениями, выполняющимися на базе M_p:

$$A_{1a}^{m+1} - A_{2a}^{m+2} = 0, \quad A_{1a}^{m+2} + A_{2a}^{m+1} = 0, \qquad (3.22)$$

которые в силу (1.5) приводят к дифференциальным уравнениям

$$\omega_1^{m+1} - \omega_2^{m+2} = 0, \quad \omega_1^{m+2} + \omega_2^{m+1} = 0. \qquad (3.23)$$

Предположим, что на базе M_p выполняются с учётом (3.20) и (3.23) дифференциальные уравнения:

$$\omega_1^{m+1} - \omega_2^{m+2} = 0, \ \omega_1^{m+2} + \omega_2^{m+1} = 0,$$

$$\omega_{\alpha_2}^{\hat\alpha_1} = 0, \ \omega_{\alpha_1}^{\hat\alpha_2} = 0, \ \omega_{\hat\alpha_1}^{\alpha_2} = 0, \ \omega_{\alpha_1}^{\hat\alpha_2} = 0, \qquad (3.24)$$

которые определяют многообразие $\overset{*}{S}_p^m$ – частный случай многообразия S_p^m. Из (1.1) замечаем, что система (3.24) замкнута относительно операции внешнего дифференцирования [1]. Это означает существование многообразия $\overset{*}{S}_p^m$, а, следовательно, и многообразия $\tilde{S}_p^m$. Теорема 3.4 доказана.

4. Геометрические свойства многообразия $\overset{*}{S}_p^m$

4.1. Из дифференциальных уравнений (1.5) и (3.24) с учётом (2.12) следует, что в случае многообразия $\overset{*}{S}_p^m$ на базе M_p имеют место соотношения (3.22) и

$$A_{\alpha_1 a}^{\hat\alpha_2} = 0, \quad A_{\hat\alpha_1 a}^{\alpha_2} = 0, \quad A_{\alpha_1 a}^{\alpha_2} = 0, \quad A_{\hat\alpha_1 a}^{\hat\alpha_2} = 0. \qquad (4.1)$$

Из (2.4, 2.8 и 4.1) получаем

$$A^{\alpha_1} = \frac{1}{2} A_{(a}^{\hat\alpha_2} A_{|\hat\alpha_2|b)}^{\alpha_1} A^{ab}, \ A^{\alpha_2} = \frac{1}{2} A_{(a}^{\hat\alpha_2} A_{|\hat\alpha_2|b)}^{\alpha_2} A^{ab},$$

$$A_{\alpha_1}^{\beta_1} = \frac{1}{2} A_{\alpha_1(a}^{\hat\alpha_1} A_{|\hat\alpha_1|b)}^{\beta_1}, \ A_{\alpha_2}^{\beta_2} = \frac{1}{2} A_{\alpha_2(a}^{\hat\alpha_2} A_{\hat\alpha_2 b)}^{\beta_2} A^{ab}, \ A_{\alpha_1}^{\beta_2} = A_{\beta_2}^{\alpha_1} = 0,$$

$$A_{ab} = A_{\alpha_1 a}^{\hat\alpha_1} A_{|\hat\alpha_1|b}^{\alpha_1} + A_{\alpha_2 a}^{\hat\alpha_2} A_{|\hat\alpha_2|b}^{\alpha_2}, \quad A_{\hat\alpha_1}^{\hat\beta_1} = \frac{1}{2} A_{\hat\alpha_1(a}^{\alpha_1} A_{|\alpha_1|b)}^{\hat\beta_1}, \qquad (4.2)$$

$$A_{\hat\alpha_2}^{\hat\beta_2} = \frac{1}{2} A_{\hat\alpha_2(a}^{\alpha_2} A_{|\alpha_2|b)}^{\hat\beta_2} A^{ab}, \ A_{ab} = A_{\hat\alpha_1}^{\hat\beta_2} = A_{\hat\beta_2}^{\hat\alpha_1} = 0.$$

Отсюда следует, что на базе M_p многообразия $\overset{*}{S}_p^m$ в общем случае имеют место неравенства

$$\det[A_\alpha^\beta] = \det[A_{\alpha_1}^{\beta_1}] \cdot \det[A_{\alpha_2}^{\beta_2}] \neq 0,$$

$$\det[A_{\hat\alpha}^{\hat\beta}] = \det[A_{\hat\alpha_1}^{\hat\beta_1}] \cdot \det[A_{\hat\alpha_2}^{\hat\beta_2}] \neq 0, \quad \det[A_{ab}] \neq 0,$$

что не противоречит соотношениям [4, (2.1)], (2.6) и [4, (3.10)]. Поэтому многообразие $\overset{*}{S}_p^m$ представляет собой частный случай многообразия $\tilde{S}_p^m$ – p-семейства (в общем случае необязательно центроаффинных) m-плоскостей l_m в E_n.

4.2. Из (1.4, 2.3, 2.21 и 2.23) с учётом (2.15, 2.16 и 4.2) получаем, что в каждой точке $B(u^a) \in M_p$ определены следующие линейные подпространства:

$$\Gamma_4^1 = l_2^1 \cup l_2^2 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_{m+1}, \bar{e}_{m+2}),$$

$$\Gamma_{n-4}^2 = \tilde{l}_{m-2} \cup \tilde{P}_{n-m-2} = (\bar{A}, \bar{e}_3, \ldots, \bar{e}_m, \bar{e}_{m+3}, \ldots, \bar{e}_n),$$

$$G_{n-2}^1 = l_m \cup \tilde{P}_{n-m-2} = (\bar{A}, \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_m, \bar{e}_{m+3}, \ldots, \bar{e}_n),$$

$$G_{n-2}^2 = \tilde{l}_{m-2} \cup P_{n-m} = (\bar{A}, \bar{e}_3, \ldots, \bar{e}_m, \bar{e}_{m+1}, \ldots, \bar{e}_n). \qquad (4.3)$$

Здесь линейные подпространства l_2^1 и l_2^2 являются неподвижными при центроаффинных преобразованиях $\Pi: l_m \rightarrow l_m$ и $\hat{\Pi}: P_{n-m} \rightarrow P_{n-m}$, соответственно.

Теорема 4.1. В каждой точке $B(u^a) \in M_p$ многообразия $\overset{*}{S}_p^m$ в E_n все характеристики $(n-2)$-плоскостей G_{n-2}^1 и G_{n-2}^2 вдоль любой кривой $k(t)$ на базе M_p, проходящей через точку $B(u^a) \in M_p$, параллельны линейному подпространству Γ_{n-4}^2.

Доказательство. Из (4.3) следует, что точка $Z \in G_{n-2}^1$ с радиус-вектором $\bar{Z} = \bar{A} + x^{\alpha_2} \bar{e}_{\alpha_2} + x^{\hat\alpha_2} \bar{e}_{\hat\alpha_2}$, отвечающая точке $B(u^a) \in M_p$, будет текущей точкой $(\mathrm{ch}\, G_{n-2}^1)_{\forall k(t)}$ – характеристики $(n-2)$-плоскости G_{n-2}^1 вдоль любой кривой $k(t)$ на базе M_p – тогда и только тогда, когда $(d\bar{Z}, \bar{e}_3, \ldots, \bar{e}_m, \bar{e}_{m+3}, \ldots \bar{e}_n) = 0$, ($\theta^a$ – любые). Отсюда с учётом (1.1, 1.5, 2.1, 3.20, 3.24, 2.1 и 4.2) получаем справедливость настоящей теоремы как для $(n-2)$-плоскости G_{n-2}^1, так и аналогично для G_{n-2}^2.

4.3. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.2. В каждой точке $B(u^a)\in M_p$ многообразия $\overset{*}{S}{}_p^m$ в E_n ($n>4$) перспективные аффинные связности в смысле [3]: $C_{12}:\Gamma_4^1\to\Gamma_{n-4}^2$ и $C_{21}:\Gamma_{n-4}^2\to\Gamma_4^1$ являются локально плоскими.

Доказательство. В соответствии с [3] связность $C_{12}\{C_{21}\}$ отображает $\Gamma_4\{\Gamma_{n-4}\}$, соседнюю $\Gamma_4'\{\Gamma_{n-4}'\}$ (бесконечно близкую первого порядка) в направлении $\Gamma_{n-4}\{\Gamma_4\}$. Каждая из этих связностей имеет 1-формы связности:

$$C_{12}:\omega^{\alpha_1},\omega^{\widehat{\alpha}_1},\omega^{\beta_1}_{\alpha_1},\omega^{\widehat{\alpha}_1}_{\alpha_1}=-\omega^{\alpha_1}_{\widehat{\alpha}_1};$$

$$C_{21}:\omega^{\alpha_2},\omega^{\widehat{\alpha}_2},\omega^{\beta_2}_{\alpha_2},\omega^{\widehat{\alpha}_2}_{\alpha_2}=-\omega^{\alpha_2}_{\widehat{\alpha}_2},$$

которые в силу (1.1) и (3.24) удовлетворяют следующим структурным уравнениям:

$$\Omega^{\alpha_1}\equiv D\omega^{\alpha_1}-\omega^{\beta_1}\wedge\omega^{\alpha_1}_{\beta_1}-\omega^{\widehat{\beta}_1}\wedge\omega^{\alpha_1}_{\widehat{\beta}_1}=0,$$

$$\Omega^{\widehat{\alpha}_1}\equiv D\omega^{\widehat{\alpha}_1}-\omega^{\alpha_1}\wedge\omega^{\widehat{\alpha}_1}_{\alpha_1}-\omega^{\widehat{\beta}_1}\wedge\omega^{\widehat{\alpha}_1}_{\widehat{\beta}_1}=0,$$

$$\Omega^{\beta_1}_{\alpha_1}\equiv D\omega^{\beta_1}_{\alpha_1}-\omega^{\widehat{\alpha}_1}_{\alpha_1}\wedge\omega^{\beta_1}_{\widehat{\alpha}_1}-\omega^{\gamma_1}_{\alpha_1}\wedge\omega^{\beta_1}_{\gamma_1}=0,$$

$$\Omega^{\widehat{\alpha}_1}_{\alpha_1}\equiv D\omega^{\widehat{\alpha}_1}_{\alpha_1}-\omega^{\beta_1}_{\alpha_1}\wedge\omega^{\widehat{\alpha}_1}_{\beta_1}-\omega^{\beta_2}_{\alpha_1}\wedge\omega^{\widehat{\alpha}_1}_{\beta_2}=0,$$

$$\Omega^{\alpha_2}\equiv D\omega^{\alpha_2}-\omega^{\beta_2}\wedge\omega^{\alpha_2}_{\beta_2}-\omega^{\beta_1}\wedge\omega^{\widehat{\alpha}_1}_{\beta_1}=0,$$

$$\Omega^{\widehat{\alpha}_{21}}\equiv D\omega^{\widehat{\alpha}_2}-\omega^{\alpha_2}\wedge\omega^{\widehat{\alpha}_2}_{\alpha_2}-\omega^{\widehat{\beta}_2}\wedge\omega^{\widehat{\alpha}_2}_{\widehat{\beta}_2}=0,$$

$$\Omega^{\beta_2}_{\alpha_2}\equiv D\omega^{\beta_2}_{\alpha_2}-\omega^{\widehat{\alpha}_2}_{\alpha_2}\wedge\omega^{\beta_2}_{\widehat{\alpha}_2}-\omega^{\gamma_2}_{\alpha_2}\wedge\omega^{\beta_2}_{\gamma_2}=0,$$

$$\Omega^{\widehat{\alpha}_2}_{\alpha_2}\equiv D\omega^{\widehat{\alpha}_2}_{\alpha_2}-\omega^{\beta_2}_{\alpha_2}\wedge\omega^{\widehat{\alpha}_2}_{\beta_2}-\omega^{\beta_1}_{\alpha_2}\wedge\omega^{\widehat{\alpha}_2}_{\beta_1}=0.$$

Это означает, что 2-формы кручения и кривизны связностей C_{12} и C_{21} равны нулю на базе M_p многообразия $\overset{*}{S}{}_p^m$, что и доказывает настоящую теорему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.
2. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды московского математического общества. – М., 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
3. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1979. – С. 7–246.
4. Ивлев Е.Т., Молдованова Е.А. О центрировании семейства линейных подпространств в многомерном евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. – 2005. – Т. 308. – № 3. – С. 6–10.
5. Акивис М.А. Фокальные образы поверхностей ранга *r* // Известия вузов. Сер. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.
6. Александров И.А. Теория функций комплексного переменного. – Томск: Томский государственный университет, 2002. – 510 с.

УДК 519.644

К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ ПО ПОВЕРХНОСТИ СФЕРЫ (n+1)-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Э.А. Шамсиев

Ташкентский государственный технический университет
E-mail: shamciev_tstu@mail.ru

Предлагается способ получения кубатурной формулы (2m−1)-й степени точности для многомерной сферы, когда известна формула аналогичной степени точности для сферы, чья размерность на единицу меньше.

Рассмотрим в n-мерном евклидовом пространстве R^n единичную сферу $S_{n-1}=\{x\in R^n|x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=1\}$. Для произвольного одночлена $x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}...x_n^{\beta_n}$

$$\int\limits_{S_{n-1}}x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}...x_n^{\beta_n}dS=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2\Gamma\left(\dfrac{\beta_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\beta_2+1}{2}\right)\dots\Gamma\left(\dfrac{\beta_n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\beta_1+\beta_2+...+\beta_n+n}{2}\right)}, & \text{если все } \beta_i \text{ четны} \quad i=1,2,3,\dots,n\\ 0, \text{ в противном случае,} & \end{cases}$$

где $\Gamma(k)=\int\limits_0^\infty t^{k-1}e^{-t}dt$ – гамма-функция Эйлера.

Пусть известна кубатурная формула $(2m-1)$-й степени точности

$$\int\limits_{S_{n-1}}f(x)dS\cong\sum_{i=1}^{N}C_if(a^{(i)}). \tag{1}$$

Исследуем вопрос существования кубатурной формулы аналогичной степени точности для S_n вида

$$\int\limits_{S_n}f(x)dS\cong\sum_{j=1}^{m}T_j\sum_{i=1}^{N}C_jf(\sqrt{1-t_j^2}a^{(i)},t_j), \tag{2}$$

где T_j и t_j определяются как параметры некоторой весовой квадратурной формулы типа Гаусса для отрезка $[-1;1]$: